*На правах рукописи*

КУНГУРЦЕВ АЛЕКСЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

# ЗАДАЧИ С НОРМАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань - 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Казанского государственного университета .

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Жегалов Валентин Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Репин Олег Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент Бурмистров Борис Николаевич

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится “03” декабря 2008 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань ул. Нужина д. 17, ауд. 324

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан “ ” 2008г

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Липачев Е. К

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Работа посвящена исследованию вопросов разрешимости в евклидовых пространствах различной размерности задач об отыскании решений уравнений вида

$$\frac{\partial^n U}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = F(U), \tag{1}$$

по граничным условиям, содержащим значения нормальных производных от функции $U$. При этом рассматриваемые области образованы характеристиками уравнения (1), а нелинейный оператор $F$ содержит лишь производные от $U$, получаемые из $\frac{\partial^n U}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ путем отбрасывания, по крайней мере, одного дифференцирования, и саму функцию. В частности, при $n = 2$, $F(U) = k \exp U$, $k = const > 0$ (1) является известным уравнением Лиувилля.

Исследование новых задач для уравнений обсуждаемого класса представляет интерес как с точки зрения развития общей теории уравнений с частными производными, так и в связи с возможными приложениями. Частные случаи (1) с линейным оператором $F$ встречаются при изучении процессов, связанных с явлениями вибрации и другими задачами механики и математической физики, играют существенную роль в теориях аппроксимации и отображений, к ним сводится задача интегрального представления преобразований одних обыкновенных линейных дифференциальных операторов в другие. Известное нелинейное синус-уравнение Гордона и его обобщения, имеющие различные приложения (статистическая механика, теория поля, оптика, кристаллография) тоже являются частными случаями уравнения (1).

Различные вопросы теории уравнений (1) с линейным оператором $F(U)$ изучали Л. Бианки, О. Никколетти, Е. Лаэ, М. К. Фаге, С. С. Харибегашвили, В. И. Жегалов, В. Ф. Волкодавов, В. А. Севастьянов, А. Н. Миронов, О. М. Джохадзе и целый ряд других авторов. В частности в работах В. И. Жегалова, А. Н. Миронова (от 1992 и 2000г.) были исследованы и задачи с нормальными производными в граничных условиях. Публикаций же по изучению подобных задач для нелинейных уравнений до последнего времени не было. Предлагаемая работа в определенной мере заполняет данный пробел. При этом ее содержание можно рассматривать как естественное развитие только что указанных результатов от 1992 и 2000 годов.

**Цель работы.** Отыскание условий, достаточных для разрешимости в характеристических областях задач с нормальными производными в граничных условиях для нелинейных уравнений вида (1) и разработка методов исследования различных вариантов этой разрешимости.

**Общая методика исследования.** В работе используются результаты и методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. Существенную роль играет метод последовательных приближений.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые результаты.

1. В пространствах различного числа измерений определены условия на правые части уравнений вида (1), позволяющие исследовать вопросы разрешимости рассматриваемых задач.

2. Разработан способ редукции этих задач к задачам Гурса.

3. Построена картина их разрешимости, оказавшаяся многовариантной.

4. Для уравнения Лиувилля построены в явном виде решения задач с граничными условиями первого, второго и третьего рода.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Она является продолжением и развитием исследований граничных задач для уравнений данного класса.

**Апробация работы.** Результаты диссертации по мере их получения докладывались на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Казанского университета, а также на международных и всероссийских конференциях: Международная молодежная научная школа – конференция "Лобачевские чтения – 2002", Казань 28.11-01.12.2002; Шестая Казанская международная школа – конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Казань 27.06-04.07.2003; Седьмая Казанская международная школа – конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Казань 27.06-04.07.2005; Четвертая молодежная научная школа – конференция "Лобачевские чтения – 2005", Казань 16.12-18.12.2005 посвященная 100-летию со дня рождения профессора Б. Л. Лаптева; Пятая молодежная научная школа – конференция "Лобачевские чтения – 2006", Казань 28.11-02.12.2006; Международная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Самара, 2007г.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 9 работ, в том числе 2 работы в изданиях из перечня ВАК от 30.11.2006г. Список публикаций приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения и трех глав, общий ее объем 120 страниц, в списке литературы 69 наименований, включая работы автора.

## Краткое содержание работы

**Первая глава**, носящая вспомогательный характер, посвящена изложению в удобной для дальнейшего использования форме результатов, относящихся к задаче Гурса для уравнения (1) с нелинейным оператором $F(U)$. Для искомой функции и правой части уравнения (1) в рассуждениях требуется определенная гладкость. В связи с этим через $C^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ обозначается класс функций с непрерывными производными $\dfrac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}$ для всех $0\le\beta_k\le\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$.

В наиболее простом случае $n=2$ задача Гурса, рассматриваемая в области $D=\{x_0<x<x_1, y_0<y<y_1\}$, заключается в отыскании функции $U(x,y)\in C^{(1,1)}(D)\bigcap C^{(0,0)}(\overline{D})$, являющейся в $D$ решением уравнения

$$U_{xy}=f(x,y,U,U_x,U_y) \tag{2}$$

и удовлетворяющей условиям

$$U(x,y_0)=\varphi_1(x),\ \ x\in[x_0,x_1],\ \ U(x_0,y)=\varphi_2(y),\ \ y\in[y_0,y_1]. \tag{3}$$

В силу непрерывности $U(x,y)$ в $\overline{D}$ должно выполняться равенство $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(y_0)$.

Функция $f(x,y,t_1,t_2,t_3)$ определена в $\overline{D}\times T$, где $T=\{-\infty<t_k<+\infty,\ k=1,2,3\}$. Путем линейной замены переменных $x=x_0+\xi$, $y=y_0+\eta$, $t_k=t_{k0}+\theta_k$ $(k=1,2,3)$ можно привести (2) к случаю $x_0=y_0=t_{k0}=0$ $(k=1,2,3)$. Граничные условия (3) приобретают тогда вид

$$U(x,0)=\varphi_1(x), U(0,y)=\varphi_2(y),\ \varphi_1(0)=\varphi_2(0). \tag{4}$$

В книге Ф. Трикоми “Лекции по уравнениям в частных производных” (М.: ИЛ, 1957. – 443с.) методом последовательных приближений доказано следующее утверждение: пусть в ячейке

$$0 \le x \le x_1,\ \ 0 \le y \le y_1,\ \ |U| \le b,\ \ |U_x| \le \lambda + b',\ \ |U_y| \le \lambda + b'' \qquad (5)$$

функция $f$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left| f(x,y,U^*,U_x^*,U_y^*) - f(x,y,U^{**},U_x^{**},U_y^{**}) \right| \le$$

$$\le A(\left|U^* - U^{**}\right| + \left|U_x^* - U_x^{**}\right| + \left|U_x^* - U_x^{**}\right|), \qquad (6)$$

где $\lambda = \max\limits_{[0,x_1][0,y_1]}(|\varphi_1'|,|\varphi_2'|)$, $b,b',b''$- любые положительные числа, $A = const > 0$. Тогда решение рассматриваемой задачи существует и единственно в прямоугольнике $R$, определяемом неравенствами

$$0 \le x \le h,\ \ 0 \le y \le k,$$

$$h = \min(x_1, \frac{b''}{M}, \frac{b}{2\sqrt{\lambda^2 + bM}}),\ \ k = \min(y_1, \frac{b'}{M}, \frac{b}{2\sqrt{\lambda^2 + bM}}),$$

$M$ - верхняя граница $|f|$ в ячейке (5). Как мы видим, решение получается в прямоугольнике, который может совпадать с $D$ лишь в случае достаточно больших $b,b',b''$, но в остальном эти константы остаются неопределенными. Это обстоятельство не позволяет нам применить данный результат к исследованию более сложных задач во второй главе. В § 1 главы 1 доказано , что метод последовательных приближений все же позволяет получить нужный результат, если функция $f$ задана на множестве $D \times T$ с неограниченными компонентами $t_1,t_2,t_3.$ А именно, имеет место

**Теорема 1.1.** *Если* $\varphi_1 \in C^1[0,x]$, $\varphi_2 \in C^1[0,y]$, *функция* $f(x,y,t_1,t_2,t_3)$ *непрерывна в* $D$ *по* $(x,y)$ *и ограничена на множестве* $\overline{D} \times T$, *где* $T = \{-\infty < t_k < +\infty,\ k = 1,2,3\}$, *а также удовлетворяет неравенству (6), то в области* $D$ *существует единственное решение задачи (2),(4).*

Приведены примеры, показывающие, что при нарушениях условий этой теоремы решение может быть не единственным, или процесс последовательных приближений не сходится.

В §§ 2-3 показывается, каким образом теорема 1.1 может быть распространена на случай любого конечного $n$.

Автор не претендует на новизну сформулированных в первой главе результатов, поскольку нет уверенности в том, что они не были получены ранее: ведь рассматривается очень известная задача. С другой стороны, без этих результатов рассуждения из следующей (второй) главы не могут быть обоснованы.

**Во второй главе** формулируются и исследуются задачи для уравнений вида (1) с граничными условиями, предусмотренными в названии диссертации. При этом наложенных на $F(U)$ в первой главе условий оказывается недостаточно: оператор $F(U)$ должен допускать выделение линейной части, а остающееся нелинейное слагаемое имеет заданную структуру по производным от искомой функции. характер разрешимости задач зависит от коэффициентов линейной части, а в схеме рассуждений появляется для каждого случая необходимость в неоднократном применении метода последовательных приближений.

В случае двух независимых переменных вводятся функции $\alpha(x,y),\ \beta(x,y) \in C(\overline{D})$, с помощью которых рассматриваемое уравнение должно представляться в виде

$$U_{xy} + aU_x + bU_y + cU = f(x, y, U, \alpha U_x, \beta U_y), \qquad (7)$$

$a \in C^{(1,0)}(\overline{D}),\ b \in C^{(0,1)}(\overline{D}),\ c \in C^{(0,0)}(\overline{D})$.

При этом требуется еще, чтобы выполнялись условия

$$\alpha(x,0) = 0,\ x \in [0, x_1],\quad \beta(0,y) = 0,\ y \in [0, y_1]. \qquad (8)$$

Функция $f(x, y, t_1, t_2, t_3)$ непрерывна в $\overline{D}$ по $x, y$, определена и ограничена при любых значениях $t_k \, (k = \overline{1,3})$, а также удовлетворяет по $t_k$ условию Липшица.

**Задача 2.1** заключается в отыскании решения уравнения (7) по граничным условиям, получающимся путем замены в (4) хотя бы одного из значений искомой функции значением ее нормальной производной из набора

$$U_y(x,0) = \psi_1(x), \; x \in [0, x_1], \quad U_x(0, y) = \psi_2(y), \; y \in [0, y_1]. \tag{9}$$

Если условия типа (3) обозначить через Г, а типа (9) – через N, то в сформулированной задаче содержатся три варианта: ГN, NГ и NN. Поэтому для редукции к задаче Гурса (ГГ) нужно уметь по соотношениям (9) отыскивать функции $\varphi_1(x), \; \varphi_2(y)$. Это делается с помощью исследования интегральных уравнений, которые являются нелинейными, и могут быть при соответствующих условиях решены методом последовательных приближений. Указанные условия имеют вид:

$$b(0, y) \neq 0, \quad y \in [0, y_1]; \tag{10}$$

$$a(x,0) \neq 0, \; x \in [0, x_1]; \tag{11}$$

$$b(0, y) = 0, \; c(0, y) \neq 0, \; A \min\left|c(0, y)\right| < 1, \; y \in [0, y_1], \tag{12}$$

$$a(x,0) = 0, \; c(x,0) \neq 0, \; A \min\left|c(x,0)\right| < 1, \; x \in [0, x_1], \tag{13}$$

$$\psi_1'(0) + b(0,0)\psi_1(0) = \psi_2'(0) + a(0,0)\psi_2(0). \tag{14}$$

Доказана

**Теорема 2.1.** *Варианты ГN и NГ однозначно разрешимы при условиях (10) и (11) соответственно. Вариант NN разрешим с точностью до одной произвольной постоянной при обоих условиях (10), (11). Этот же вариант разрешим однозначно либо при наборе (10), (13), либо при (11), (12), а однозначная разрешимость при дополнительном условии (14) имеет место, если выполняются соотношения (12), (13).*

Далее в этой главе рассматриваются случаи, относящиеся к $n \geq 3$. В случаях $n = 3,4$ аналоги уравнения (7) имеют соответственно вид

$$U_{xyz} + au_{xy} + bU_{xy} + cU_{yz} + dU_x + eU_y + gU_z + hU =$$
$$= f(x, y, z, U, \lambda U_x, \mu U_y, \nu U_z, \alpha U_{xy}, \beta U_{xz}, \gamma U_{yz}). \quad (15)$$

$$\begin{gathered} U_{xyzt} + aU_{xyz} + bU_{xyt} + cU_{xzt} + dU_{yzt} + eU_{xy} + lU_{xz} + gU_{xt} + \\ + hU_{yz} + kU_{yt} + sU_{zt} + mU_x + nU_y + pU_z + qU_t + rU = \\ = f(x, y, z, t, U, \alpha_1 U_x, \alpha_2 U_y, \alpha_3 U_z, \alpha_4 U_t, \alpha_5 U_{xy}, \alpha_6 U_{xz}, \alpha_7 U_{xt}, \\ \alpha_8 U_{yz}, \alpha_9 U_{yt}, \alpha_{10} U_{zt}, \alpha_{11} U_{xyz}, \alpha_{12} U_{xyt}, \alpha_{13} U_{xzt}, \alpha_{14} U_{yzt}). \end{gathered} \quad (16)$$

Функции $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_k, \alpha_{ks} \in C^{(0,0,0)}(\overline{D})$ и удовлетворяют условиям, обобщающим (8). Мы не выписываем здесь условия гладкости на $f$ и на коэффициенты $a, b, c, \ldots$ (в тексте диссертации они имеются).

Для любого конечного $n$ аналогом (15) - (16) будет уравнение

$$U_{x_1 x_2 \ldots x_n} + L(U) = f(x_1, \ldots, x_n, V), \quad (17)$$

где

$$L(U) = a_1^1 U_{x_1 \ldots x_{n-1}} + a_2^1 U_{x_1 \ldots x_{n-2} x_n} + \ldots + a_{m_1}^1 U_{x_2 \ldots x_n} + a_1^2 U_{x_1 \ldots x_{n-2}} + a_2^2 U_{x_1 \ldots x_{n-3} x_{n-1}} + \ldots + a_{m_2}^2 U_{x_3 \ldots x_n} +$$
$$+ \ldots + a_1^{n-1} U_{x_1} + a_2^{n-1} U_{x_2} + \ldots + a_{m_{n-1}}^{n-1} U_{x_n} + a_1^n U,$$

$$V = \{U, \alpha_1^1 U_{x_1}, \ldots, \alpha_{m_1}^1 U_{x_n}, \alpha_1^2 U_{x_1 x_2}, \ldots, \alpha_{m_2}^2 U_{x_{n-1} x_n}, \ldots, \alpha_1^{n-1} U_{x_1 x_3 x_4 \ldots x_n}, \ldots, \alpha_{m_{n-1}}^{n-1} U_{x_2 \ldots x_n}\},$$

$m_i = C_n^i, i = \overline{1, n-1}$, $\alpha_p^r$, $p = \overline{1, m_{n-1}}$, $r = \overline{1, n-1}$ − непрерывные на $\overline{D}$ функции.

В случае $n = 3$ $D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1, 0 < z < z_1\}$. Если не считать варианты задач, получающиеся переменой ролей независимых переменных, получим три задачи. Например, естественно выбрать NГГ, NNГ и NNN. Это есть (соответственно) задачи с условиями

$$U_x(0, y, z) = \psi_3(y, z),\ U(x, 0, z) = \varphi_2(x, z), U(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad (18)$$

$$U_x(0, y, z) = \psi_3(y, z),\ U_y(x, 0, z) = \psi_2(x, z),\ U(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad (19)$$

$$U_x(0, y, z) = \psi_3(y, z)\ \ U_y(x, 0, z) = \psi_2(x, z),\ U_z(x, y, 0) = \psi_1(x, y). \quad (20)$$

Для отыскания $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ здесь получаются интегральные уравнения на гранях $x=0$, $y=0$, $z=0$. На грани $x=0$ условия, играющие роль (10) - (13) (с добавленными к ним соотношениями, обобщающими (8)), имеют вид

1) $\gamma(0,y,z)=0$, $c(0,y,z)\neq 0$.

2) $\gamma(0,y,z)=0$, $\mu(0,y,z)=0$, $\nu(0,y,z)=0$,

$c(0,y,z)=g(0,y,z)=0$, $e(0,y,z)\neq 0$. (21)

3) $\gamma(0,y,z)=0$, $\mu(0,y,z)=0$, $\nu(0,y,z)=0$,

$c(0,y,z)=e(0,y,z)=0$, $g(0,y,z)\neq 0$.

4) $\gamma(0,y,z)=0$, $\mu(0,y,z)=0$, $\nu(0,y,z)=0$,

$c(0,y,z)=e(0,y,z)=g(0,y,z)\equiv 0$, $h(0,y,z)\neq 0$, $A\min\left|h(0,y,z)\right|<1$.

Для $y=0$, $z=0$ записываются аналоги 1) - 4).

Наиболее простым является вариант NГГ. Здесь достаточно (21) и верна

**Теорема 2.2**. *Если* $\varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{Z})$, $\varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y})$, $\psi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{X})$, $\gamma(0,y,z)=0$, $\mu(0,y,z)=0$, $\nu(0,y,z)=0$, *а функция* $f$ *удовлетворяет условию Липшица, то в области* $D$ *решение задачи NГГ при всех вариантах условий 1) – 4) определяется однозначно. При этом в случае 1) требуется выполнение условий согласования* $\varphi_1(0,y)=\varphi_3(0,y)$, $\varphi_3(0,z)=\varphi_2(0,z)$.

В варианте NNГ требуется комбинировать варианты 1) - 4) при $x=0$ и $y=0$. Всего их восемь: 11, 12, 13, 14, 22, 24, 33, 44 (пишем номера вариантов подряд без скобок и отбрасываем комбинации, получающиеся переменой ролей соответствующих случаев на $X$, $Y$. Отметим особо, что есть неосуществимые варианты, например, в случае 23 $g(0,y,z)\equiv 0$ и $g(x,0,z)\neq 0$. Каждый из реализуемых вариантов 11, …, 44 характеризует наличие произвольных функций и условий согласования при редукции к задаче Гурса. Выпишем комбинации, характеризующие случаи 11,…, 44, в виде таблицы.

| Комбинации | Произвольные функции | Условия согласования |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 11 | $\varphi_2(0,z)$ | $\varphi_1(0,y)=\varphi_3(0,y)$,<br>$\varphi_2(x,0)=\varphi_1(x,0)$,<br>$\varphi_3(0,z)=\varphi_2(0,z)$. |
| 12 | $\varphi_2(0,z)$ | $\varphi_1(0,y)=\varphi_3(0,y)$,<br>$\varphi_3(0,z)=\varphi_2(0,z)$. |
| 13 | $\varphi_2(0,z)$ | $\varphi_1(0,y)=\varphi_3(0,y)$,<br>$\varphi_2(x,0)=\varphi_1(x,0)$,<br>$\varphi_3(0,z)=\varphi_2(0,z)$. |
| 14 | $\varphi_2(0,z)$ | $\varphi_1(0,y)=\varphi_3(0,y)$,<br>$\varphi_3(0,z)=\varphi_2(0,z)$. |
| 22 | $\varphi_2(0,z)$ | $\varphi_3(0,z)=\varphi_2(0,z)$. |
| 24 | $\varphi_3(0,z)$ | Отсутствуют |
| 33 | Однозначная редукция | $\varphi_1(0,y)=\varphi_3(0,y)$,<br>$\varphi_2(x,0)=\varphi_1(x,0)$, |
| 44 | Однозначная редукция | Отсутствуют |

Следовательно верна,

**Теорема 2.3**. *Если* $\varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{Z})$, $\psi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y})$, $\psi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{X})$, $\beta(x,0,z)=0$, $\lambda(x,0,z)=0$, $\nu(x,0,z)=0$, *а функция* $f$ *удовлетворяет условию Липшица, то в области* $D$ *в случаях 33, 34 решение задачи NNГ определяется однозначно. В варианте 24 решение определяется с точностью до произвольной функции* $\varphi_3(0,z)$, *в остальных случаях с точностью до произвольной функции* $\varphi_2(0,z)$. *Условия согласования отсутствуют в комбинациях 24, 44. Одно такое условие – в 22; по два – 12, 14, 33; три – 11, 13.*

Для варианта NNN с помощью кодирования, аналогичного использованному в теореме 2.3 (здесь оно трехзначное), формулируется

**Теорема 2.4**. *Если* $\psi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{Z})$, $\psi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y})$, $\psi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{X})$, $\alpha(x,y,0)=0$, $\lambda(x,y,0)=0$, $\mu(x,y,0)=0$, *а функция* $f$ *удовлетворяет условию Липшица, то в области* $D$ *в случае 444 решение задачи NNN определяется однозначно. В вариантах 122, 144, 334 решение определяется с точностью до двух произвольных функций (*$\varphi_1(0,y)$, $\varphi_3(0,z)$ *- в 122, 124;* $\varphi_1(0,y)$, $\varphi_2(x,0)$ *- в 334). В остальных случаях с точностью до трех произвольных функций* $\varphi_1(0,y)$, $\varphi_2(x,0)$, $\varphi_3(0,z)$. *Условия согласования отсутствуют в комбинациях 334, 444. Два таких условия – в 122, 134, 144; три – 111, 112, 113, 114, 133.*

В пространстве четырех переменных ситуация еще более усложняется, но все можно просчитать подобно тому, как это делается для $n=3$. При этом появляются еще произвольные функции, зависящие от двух независимых функций ( в различных сочетаниях). В случае конечного $n$ излагаются лишь краткие сведения относительно схемы рассуждений и получаемых результатов. Добавим к сказанному, что после редукции каждого варианта рассматриваемых задач к задачам Гурса, эти последние опять, в соответствии с результатами первой главы, приходится сводить к интегральным уравнениям и применять к ним метод последовательных приближений.

К числу основных в математической физике относится еще задача с граничным условием вида $\frac{\partial U}{\partial n} + hU = \varphi$ (условие третьего рода). Во второй главе при $n=2$ она тоже рассмотрена. Выяснилось, что принципиально новых моментов в схеме рассуждений не возникает. Поэтому в случаях $n \geq 3$ мы на ней не останавливаемся.

Наконец, **в третьей главе** рассматривается уравнение Лиувилля

$$U_{xy} = k \exp U\ ,\ k = const > 0\ . \qquad (22)$$

При $-\infty < U < +\infty$ правая часть здесь неограниченна и условие Липшица для нее тоже не выполняется. Следовательно, условиям теорем из предыдущих глав это уравнение не подчиняется. Но мы здесь не используем метод последовательных приближений, а на основе известного представления решений

$$\exp U = \frac{2}{k}\frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2} \tag{23}$$

строим решение рассматриваемых задач в явном виде. Функции $\psi, \varphi$ в (23) являются произвольными, но мы еще предполагаем, что

$$\varphi(0) = \psi(0) = 1 . \tag{24}$$

В прямоугольнике $D = \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ рассмотрены следующие задачи.

**Задача 3.1 (Гурса)** с условиями

$$U(x,0) = \mu(x),\ x \in P = [0,a],\ U(0,y) = \nu(y),\ y \in Q = [0,b],\ \mu(0) = \nu(0) . \tag{25}$$

**Задача 3.2** с условиями, получаемыми заменой в (25) по крайней мере одного значения искомой функции значением ее нормальной производной из набора

$$U_y(x,0) = \mu_1(x),\ x \in P,\ U_x(0,y) = \nu_1(y),\ y \in Q , \tag{26}$$

**Задача 3.3** об отыскании решения уравнения (22) по условию $U(0,0) = 0$ и соотношениям

$$\begin{gathered} U_y(x,0) + h_1(x)\exp U(x,0) = \omega_1(x),\ h_1(x) \in C[0,a],\ h_1(x) > 0, \\ U_x(0,y) + h_2(y)\exp U(0,y) = \omega_2(y),\ h_2(y) \in C[0,b],\ h_2(y) > 0. \end{gathered} \tag{27}$$

**Задача 3.4**, где решение должно быть получено по условиям, получаемым из (25) заменой по крайней мере одного значения искомой функции значением второй нормальной производной из набора

$$U_{yy}(x,0) = \mu_2(x),\ x \in P,\ U_{xx}(0,y) = \nu_2(y),\ y \in Q . \tag{28}$$

Решение задачи 3.1 построено в виде

$$\exp U(x,y) = \frac{4\exp[\mu(x)+\nu(y)+U_0]}{\{2\exp U_0 - k\int\limits_0^x[\exp\mu(\xi)]d\xi\int\limits_0^y[\exp\nu(\eta)]d\eta\}^2}, \tag{29}$$

где $U_0 = U(0,0)$. Очевидно, $U_0$ известно из (25). При этом для $k$ предполагается выполнение неравенства

$$k\int_0^a [\exp\mu(\xi)]d\xi \int_0^b [\exp\nu(\eta)]d\eta < 2\exp U_0 \,. \tag{30}$$

Для задач 3.2, 3.4 по аналогии с предыдущей главой рассматриваются варианты ГN, NГ, NN и выводятся решения. Например, в случае ГN задачи 3.2 этим решением является

$$\exp U(x,y) = \frac{4\nu_1'(y)\exp[\mu(x)+\mu(0)]}{k\{2\exp\mu(0) - [\nu_1(y)-\nu_1(0)]\int_0^x [\exp\mu(\xi)]d\xi\}^2}\,. \tag{31}$$

При этом выполняется неравенство

$$[\nu_1(b)-\nu_1(0)]\int_0^a [\exp\mu(\xi)]d\xi < 2\exp\mu(0)\,, \tag{32}$$

играющее роль (30).

В заключение автор выражает искреннюю признательность научному руководителю В. И. Жегалову за постановку задач и рекомендации в процессе работы над диссертацией.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Кунгурцев А. А. Характеристическая задача с нормальными производными для квазилинейного гиперболического уравнения / Кунгурцев А. А. // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского Казань, 2002. – Т.18. – с.49–51.
2. Кунгурцев А. А. Характеристические задачи с нормальными производными для одного трехмерного гиперболического уравнения /Кунгурцев А. А. // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского Казань, 2003.– Т.19. – с.137–138.
3. Кунгурцев А. А. Характеристические задачи с нормальными производными для одного четырехмерного гиперболического уравнения

/ Кунгурцев А. А. // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского Казань, 2005. – Т.30. – с.91 – 93.

4. Кунгурцев А. А. Об одном n-мерном варианте задачи Гурса / Кунгурцев А. А. // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского Казань, 2005. – Т.31. – с.83 – 85.
5. Кунгурцев А. А. Об одном гиперболическом уравнении в трехмерном пространстве / Кунгурцев А. А.// Изв. вузов. Математика. – 2006. – №3. – С. 76-80.
6. Кунгурцев А. А. О характеристических граничных задачах для квазилинейного аналога уравнения Бианки в четырехмерном пространстве / Кунгурцев А. А. // Казанский ун-т. – Казань, 2007. – 25с. – деп. в ВИНИТИ 27.06.2007, №681-В2007.
7. Жегалов В. И. Построение решения задачи Гурса для уравнения Лиувилля / Жегалов В. И., Кунгурцев А. А. // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского Казань, 2006. – Т.34. – с.96 – 100.
8. Жегалов В. И. Три задачи для уравнения Лиувилля / Жегалов В. И., Кунгурцев А. А. // Тез. докл. конф. “Дифференциальные уравнения и их приложения“. – Самара, 2007. – С. 49 – 52.
9. Жегалов В. И. О характеристических граничных задачах для уравнения Лиувилля / Жегалов В. И., Кунгурцев А. А. // Изв. вузов. Математика. – 2008. – №11. – С.

В совместных работах [7] – [9] В. И. Жегалову принадлежат постановки задач и общие рекомендации по их решению. При этом [9] представляет собой подробное изложение результатов, анонсированных в [7], [8].